

数学分析(B2)习题课讲义

本科15级 理科试验1班 吴天

2018年3月16日

前言

所谓数学分析(B2)，内容以多变量微积分、Fourier分析、一致性问题为主。就与数学分析(B1)课程相比较而言，复杂的证明少了很多，更多的是实质性的计算，而这要求计算能力要过关，尤其是数学分析(B1)中单变量积分的计算要有扎实的功底，方能做到从小处来说，能够从容应对课程考试；从大处来讲，今后的科研工作中用到的时候能更加娴熟。

第八章是**空间解析几何**。它其实可以不放在数学分析这门课中，但它通常是高等数学教材的重要组成部分，这部分内容对于多变量微积分的理解比较重要。本章内容可以算是一个引子，也可以说是教材中最简单的一部分。不过它需要比较强的计算能力，题目通常运算量很大，这就需要同学们耐心细致。

第九章是**多变量函数的微分学**。从有限维欧式空间的基本拓扑性质开始讲起，直到微分形式，它与单变量微积分有很多相似的地方，因此难度也相对不大。真正对于其他学科方向应用当中比较有用的是 \mathbb{R}^3 的各种微分情况，这是因为我们生活的这个世界观上就是 \mathbb{R}^3 的，我们有直觉来帮助我们理解 \mathbb{R}^3 上的微分学，这就是场论。场论实际上起源于物理，后来逐渐演变为了一个数学研究方向。在数学研究的深入过程中，对于 \mathbb{R}^3 上的研究方法加以推广，可以得到一般流形上的类似结果，这就是微分流形理论。而至于最开始讲的欧式空间拓扑性质是教材中最难的几个地方之一，当然对于非数学类要求不高。

第十章是**多变量函数的重积分**。它与单变量积分是有很大区别的，尤其是积分区域，从单变量我们熟悉的区间(一维连通集)变成了一个一般的区域，不过它们的来源是一样的——Riemann积分。在计算过程中，由于积分区域的复杂性，通常我们要通过画图像来理清变量间的关系，但是有很多时候很难作图，这就需要一些单变量中不曾有的技巧来处理。这章是很重要的一章，既需要单变量积分的基本功，也需要对于重积分有很深的理解。在以后的理工科应用中，重积分的使用次数不会少于单积分，因此一定要重视本章的学习。

第十一章是**曲线积分和曲面积分**。这章的内容来源于物理问题——电荷分布、水的流

量等等. 经过数学家的探索, 把它在闭合曲线(面)的计算化为高一维的重积分, 并抽象出了著名的Gauss散度定理、Stokes公式、Green公式. 这些定理揭示的正是高一维的重积分与低一维的曲线(面)积分之间的关系, 它们可以称为高维的Newton-Leibniz公式. 而上述提到的场论就是本章最后的内容, 场论的内容主要是梯度、散度、旋度, 它们表面上看是微分的过程, 但是它们与积分有密不可分的联系, 甚至可以用积分来定义. 事实上, 在分析学中, 大多数的微分都是靠积分定义的, 因为积分是更本质的东西, 它只需要测度就够了.

第十二章是**Fourier分析**. 它是在物理等学科中应用很多的一块微积分知识. 它起源于人们想要使用三角函数组成的级数来逼近一个周期函数的问题. 而这里的Fourier变换可以使微积分运算变得更为简便(例如Fourier变换可以变微分为乘法运算), 这也使解微分方程更加方便. 通过查表, 可以很方便地处理许多复杂的实际问题. 实际上, Fourier分析只是使用三角函数来逼近, 如果使用别的函数是否可以? 很多是可以的, 但是可能没有比较好的性质(比如Parseval等式), 而在逼近序列满足特定条件(例如正交规范基)的时候才具有好的性质, 这就是现代调和分析的研究方向.

第十三章是**广义积分和含参变量的积分**. 这是这门课程最难的部分, 尤其是涉及到一致收敛性那里, 比较容易混淆几种变量之间的关系. 本章介绍的一些方法可以处理一些普通的单变量积分无法解决的问题. 最后一节Euler积分介绍的是在实际应用、简化运算中很常用的两种函数—— Γ 函数和B函数.

本学期的课程与单变量最大的区别在于, 很多问题的处理要在高维度上, 这就需要涉及很多对于矩阵的处理, 需要同学们具有比较好的线性代数素养. 代数、分析、几何, 它们之间本就水乳交融, 互相影响. 李尚志老先生有诗为证:

代数几何熔一炉, 乾坤万物坐标书.
图形百态方程绘, 变换有规矩阵筹.
星移斗转落银河, 月印三潭伴碧波.
保短保长皆变换, 能伸能屈是几何.

本讲义与上册不同, 只是将习题课所涉及内容列出来. 涉及到参考书籍的时候, 使用本书后记的参考书目绿色代号指代(例如[3]指代常庚哲、史济怀《数学分析教程》(第三版)). 这本讲义中的讨论以及记号一切以教材为准, 教材出现的不再赘述, 仅对于教材未出现的知识或题目进行一些补充. 然而能力所限, 必有不少纰漏之处, 望同学们指出.

本科15级 理科试验1班 基础数学专业 吴天

2018年3月 于合肥 中国科技大学

常用记号

P^T	矩阵 P 的转置
P^{-1}	矩阵 P 的逆
$ P , \det P$	矩阵 P 的行列式
$\text{rank } P$	矩阵 P 的秩
$P_{(i,j)}$	矩阵 P 的 (i, j) 元
I_n	n 阶单位方阵
Σ, Π, \cup, \cap	大型运算符
\mathbb{R}^d	d 维Euclid空间
A^C	集合 A 的补集
A°	集合 A 的内部
\bar{A}	集合 A 的闭包
A'	集合 A 的导集
∂A	集合 A 的边界
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	向量的内积
$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$	向量的外积
∇, grad	梯度
$\nabla \cdot, \text{div}$	散度
$\nabla \times, \text{rot}$	旋度

目 录

前 言	i
常用记号	iii
1 解析几何简介	1
1.1 坐标变换公式	1
1.2 平面二次曲线方程的化简	2
1.3 二次曲线的不变量	3
1.4 二次曲线分类理论	5
1.5 空间上的平面、直线	6
1.6 二次曲面	7
2 Euclid空间与度量拓扑	9
2.1 有限维Euclid空间	9
2.2 度量拓扑的基本性质	11
2.3 连通与道路连通	12
2.4 点列收敛与实数公理	13
3 多变量函数的连续性与微分学	15
3.1 极坐标与极限计算	15
3.2 多变量函数的可微性	16
3.3 换元与隐函数求导	17
参考文献	19

§1 解析几何简介

如果你认为这是高中接触过的内容，那就图样了。

§1.1 坐标变换公式

鉴于大家不久之后会学空间的坐标变换，直接理解可能会有些阻碍，因此我们先从二维开始，并且利用平面的坐标变换来研究一般的二次曲线理论。感兴趣的同学可以具体参考[6]的4.1 4.3 5.1 5.2，不过本文中是以点的角度来考察，丘维声教授的书上是以坐标轴为考察对象，因此二者的符号使用正好相反。之所以我用点的角度考察，是因为这样更加直观，并且避免出现坐标系之间的过渡矩阵等概念。

对于平面的坐标变换，我们只考虑平移、旋转。其中平移是简单的，只要分别在横纵坐标上加上一个数即可。下面我们考察旋转，先从最简单的情况——一个点绕着原点的旋转，而事实上，在允许使用平移的情况下，我们也只需考虑绕原点的旋转。

设点 $P(x, y)$ ，考虑它绕着原点 O 逆时针旋转 θ 角得到 P' ，则 $|OP'| = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$ 。定义 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ，设 \overrightarrow{OP} 与 x 轴正方向夹角为 φ ，那么我们有 \overrightarrow{OP} 的极坐标表示：

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} .$$

类似地， $\overrightarrow{OP'}$ 的极坐标表示为：

$$\begin{cases} x' = r \cos(\varphi + \theta) = r(\cos \varphi \cos \theta - \sin \varphi \sin \theta) = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' = r \sin(\varphi + \theta) = r(\sin \varphi \cos \theta + \cos \varphi \sin \theta) = x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases} .$$

而在通常情况下，我们在对一个曲线做旋转的时候，最后处理方程时如能得到 (x, y) 关于 (x', y') 的关系更好：

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta + y' \sin \theta \\ y = -x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases} \quad (1.1)$$

方程(1.1)叫做**旋转公式**。

注记 上述处理问题的手法，灵感来源于平面点与复数的对应。实际上，平面点的直角坐标对应于复数的分部形式；平面点的极坐标对应于复数的辐角形式。

若仅考察平移，那么 P 点经过沿 $(-x_0, -y_0)$ 平移变为 P' 点的方程(1.2)称为**平移公式**：

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

结合式(1.1)和(1.2)，我们得到一般的坐标变换公式均可表示为：

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta + y' \sin \theta + x_0 \\ y = -x' \sin \theta + y' \cos \theta + y_0 \end{cases}$$

很多时候，我们更愿意用矩阵形式来表达：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

注记 在我们考虑的问题中，不会考虑手性改变以及非刚体的坐标变换。

例1.1 试考察分式线性函数 $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ 的图像。

提示

$$\left(y - \frac{a}{c}\right) \left(x + \frac{d}{c}\right) = \frac{bc - ad}{c^2}.$$

练习 试做出分式线性函数 $y = \frac{2x + 3}{x + 4}$ 的图像。

§1.2 平面二次曲线方程的化简

平面上二次曲线的一般方程是：

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0 \quad (a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 > 0)$$

也可以写成矩阵式

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (1.4)$$

首先考察旋转, 由式(1.1), 可知一次项不受影响, 而在 θ 取恰当值的时候, 可以将二次交叉项消掉. 经过计算, 在承认 $\arccot + \infty = 0$ (即不旋转)的情况下:

$$\theta = -\frac{1}{2} \arccot \cot \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}.$$

之后通过配方, 即可得到没有一次项的标准形式, 从而可判断二次曲线的种类.

例1.2 研究二次曲线 $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 24x - 12y + 18 = 0$.

提示 $\tan \theta$ 可取为2, 这条曲线是个椭圆!

例1.3 研究二次曲线 $4x^2 + 8xy + 4y^2 + 13x + 3y + 4 = 0$.

提示 $\tan \theta$ 可取为-1, 这条曲线是个抛物线!

§1.3 二次曲线的不变量

我们考察在进行平移和旋转变换之后, 有哪些量是不变的. 引入记号:

$$\alpha = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \alpha' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \alpha_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$I_1 = a_{11} + a_{22}, I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}.$$

定理1.1.1 在作坐标变换 $\alpha = T\alpha' + \alpha_0$ (即(1.3))之后, I_1, I_2, I_3 均不变.

证明 规定在变换以后, 方程的系数记号均带有'.

1. 直接计算:

$$a'_{11} = a_{11} \cos^2 \theta - 2a_{12} \sin \theta \cos \theta + a_{22} \sin^2 \theta$$

$$a'_{22} = a_{11} \sin^2 \theta + 2a_{12} \sin \theta \cos \theta + a_{22} \cos^2 \theta$$

从而 $I'_1 = a'_{11} + a'_{22} = a_{11} + a_{22} = I_1$, 这是显然的.

2. 利用矩阵分块理论, 把(1.3)代入(1.4)得:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \alpha'^T T^T + \alpha_0^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \delta \\ \delta^T & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T\alpha' + \alpha_0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha'^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^T A T & T^T A \alpha_0 + T^T \delta \\ \alpha_0^T A T + \delta^T T & \alpha_0^T A \alpha_0 + 2\delta^T \alpha_0 + a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

其中 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\delta = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$. 从而 $I'_2 = |T^T A T| = |T^T| |A| |T| = |A| = I_2$.

3. 由定义知: $I'_3 = \begin{vmatrix} T^T A T & T^T A \alpha_0 + T^T \delta \\ \alpha_0^T A T + \delta^T T & \alpha_0^T A \alpha_0 + 2\delta^T \alpha_0 + a_0 \end{vmatrix}$, 但是注意到:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} T^T A T & T^T A \alpha_0 + T^T \delta \\ \alpha_0^T A T + \delta^T T & \alpha_0^T A \alpha_0 + 2\delta^T \alpha_0 + a_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ \alpha_0^T T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \delta \\ \delta^T & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & T^T \alpha_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{所以 } I'_3 = \begin{vmatrix} I_2 & 0 & \left| \begin{matrix} T^T & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} A & \delta \\ \delta^T & a_0 \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} T & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} I_2 & T^T \alpha_0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right| \end{vmatrix} = |T^T| I_3 |T| = I_3. \quad \square$$

沿用上述记号, 考察只在旋转情况, 即 $\alpha_0 = 0$ 的情况下, 定义

$$K_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{则 } K'_1 &= (a'_{11} + a'_{22})a_0 - (a_1'^2 + a_2'^2) = I'_1 a_0 - \delta'^T \delta' = I_1 a_0 - (T\delta)^T (T^T \delta) \\ &= I_1 a_0 - \delta^T T T^T \delta = I_1 a_0 - \delta^T \delta = I_1 a_0 - (a_1^2 + a_2^2) = K_1. \end{aligned}$$

但是在平移的情况下, K_1 并不一定是不变量, 因此它被称为**半不变量**. 不过, 当 $I_2 = I_3 = 0$ 的时候, K_1 便成为了不变量. 感兴趣的同学可以尝试证明或去查阅有关资料. 正是因为有了不变量, 我们可以利用标准形式下的不变量与原方程的不变量相等的条件, 不需要进行坐标变换的复杂过程, 从而直接通过原方程得知二次曲线的形状信息.

§1.4 二次曲线分类理论

有了上一节的不变量理论作为铺垫，我们推导系数与二次曲线种类的关系：

一、当 $I_2 \neq 0$ 时，在消去二次交叉项之后的 I_2 正是 x'^2 和 y'^2 的系数之积，因此这种情况下两个二次项均存在，从而可以继续通过对横纵坐标的平移使两个一次项退化。因而在 $I_2 \neq 0$ 情况下，最终的标准方程为 $a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_0 = 0$ 。此时有： $I_1 = a'_{11} + a'_{22}$ ， $I_2 = a'_{11}a'_{22}$ ， $I_3 = a'_{11}a'_{22}a'_0$ ，因而 $a'_0 = \frac{I_3}{I_2}$ ，且 a'_{11} 和 a'_{22} 是 $\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0$ 的两根，这个方程被称为**特征方程**。

1. 当 $I_2 > 0$ 时， a'_{11} 与 a'_{22} 同号，这种类型叫**椭圆型**。

(1) $I_1I_3 > 0$ ，说明 a'_{11} ， a'_{22} 与 a'_0 同号，此时二次曲线是空集。

(2) $I_1I_3 < 0$ ，说明 a'_{11} ， a'_{22} 与 a'_0 异号，此时二次曲线是椭圆(包括圆)。

(3) $I_3 = 0$ ，说明 $a'_0 = 0$ ，此时二次曲线退化为一。

2. 当 $I_2 < 0$ 时， a'_{11} 与 a'_{22} 异号，这种类型叫**双曲型**。

(1) $I_3 \neq 0$ ，二次曲线为双曲线。

(2) $I_3 = 0$ ，二次曲线退化为两条相交直线。

二、当 $I_2 = 0$ 时，在消去二次交叉项之后的两个二次项必有一个退化，这种类型叫**抛物型**。

不妨设 $a'_{22} = 0$ (这样不妨设是因为可以通过旋转 90° 的方式进行变换)。因此没有了 y'^2 项， y' 项无法通过平移纵坐标来消掉。最终的标准方程为 $a'_{11}x'^2 + a'_2y' + a'_0 = 0$ (值得注意的是 a'_2 可能为 0，所以 a'_0 不一定可以通过平移纵坐标来消掉)。经过计算： $I_1 = a'_{11}$ ， $I_3 = -a'_{11}a'^2_2$ 。

3. 当 $I_2 = 0$ 时：

(1) 如果 $I_3 \neq 0$ ，则 y' 项不退化，此时二次曲线是抛物线，可通过平移使 $a'_0 = 0$ 。

(2) 如果 $I_3 = 0$ ， y' 项退化。此时 $K_1 = a'_{11}a'_0$ 。

(i) $K_1 > 0$ ，说明 a'_{11} 和 a'_0 同号，二次曲线为空集。

(ii) $K_1 < 0$ ，说明 a'_{11} 和 a'_0 异号，二次曲线退化为一对平行直线。

(iii) $K_1 = 0$ ，说明 $a'_0 = 0$ ，二次曲线退化为一对平行直线重合)。

例1.4 考察 $x^2 - 3xy + y^2 + 10x - 10y + 21 = 0$ 。直接计算得：

$$I_1 = 1 + 1 = 2, \quad I_2 = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{5}{4}, \quad I_3 = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 5 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -5 \\ 5 & -5 & 21 \end{vmatrix} = -\frac{5}{4}.$$

由 $I_2 < 0$ ， $I_3 \neq 0$ 知这是双曲线。解特征方程 $\lambda^2 - 2\lambda - \frac{5}{4} = 0$ ，得 $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ ， $\lambda_2 = \frac{5}{2}$ 。

又由于 $\frac{I_3}{I_2} = 1$, 于是标准方程可以为 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{\frac{2}{5}} = 1$.

于是该双曲线的实半轴 $a = \sqrt{2}$, 虚半轴 $b = \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

注记 λ_1 和 λ_2 可以交换位置, 因为这相当于旋转 90° , 依旧是标准方程.

例1.5 考察 $x^2 + 4xy + 4y^2 - 20x + 10y - 50 = 0$. 直接计算得 $I_1 = 5$, $I_2 = 0$. 因此这是抛物型曲线. 又 $I_3 = -625 \neq 0$, 这是抛物线. 计算 a'_2 :

$$a'_2 = \sqrt{-\frac{I_3}{I_1}} = 5\sqrt{5}$$

故这条抛物线的标准方程可以为: $y'^2 \pm 2\sqrt{5}x' = 0$, 焦参数 $p = \sqrt{5}$.

例1.6 按参数 λ 的值讨论 $\lambda x^2 - 2xy + \lambda y^2 - 2x + 2y + 5 = 0$ 的类型.

解 $I_1 = 2\lambda$, $I_2 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$, $I_3 = (5\lambda + 3)(\lambda - 1)$, $K_1 = 2(5\lambda - 1)$.

(1) 当 $|\lambda| > 1$ 时, $I_2 > 0$, 属椭圆型.

(i) 当 $\lambda > 1$ 时, $I_1 > 0$, $I_3 > 0$, 因此是空集.

(ii) 当 $\lambda < -1$ 时, $I_1 < 0$, $I_3 > 0$, 因此是椭圆.

(2) 当 $|\lambda| < 1$ 时, $I_2 < 0$, 属双曲型.

(i) 当 $-1 < \lambda < 1$ 且 $\lambda \neq -\frac{3}{5}$ 时, $I_3 \neq 0$, 因此是双曲线.

(ii) 当 $\lambda = -\frac{3}{5}$ 时, $I_3 = 0$, 因此是一对相交直线.

(3) 当 $|\lambda| = 1$ 时, $I_2 = 0$, 属抛物型.

(i) 当 $\lambda = 1$, $I_3 = 0$, $K_1 = 8 > 0$, 因此是空集.

(ii) 当 $\lambda = -1$ 时, $I_3 \neq 0$, 因此是抛物线.

§1.5 空间上的平面、直线

本节所需掌握内容以教材为主, 主要通过作业题给出一些例子. 问题都在 \mathbb{R}^3 上考虑.

例1.7 若 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, 则是否成立 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ 或 $\mathbf{b} = \mathbf{0}$?

提示 不可直接说 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, 因为这包含 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ 或 $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ 的情况, 无法反驳本题结论. 需要举出具体例子. 反例: $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 1, 0)$.

例1.8 已知向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 的夹角 $\theta = \frac{2\pi}{3}$, 又 $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = 2$, 试计算 $|(\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \times (3\mathbf{a} - \mathbf{b})|^2$.

解 利用外积的分配律和反对称性, 原式 $= |10\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = 100|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 \sin^2 \frac{2\pi}{3} = 300$.

例1.9 计算顶点为 $A(2, -1, 1)$, $B(5, 5, 4)$, $C(3, 2, -1)$, $D(4, 1, 3)$ 的四面体的体积.

解 $\overrightarrow{AB} = (3, 6, 3)$, $\overrightarrow{AC} = (1, 3, -2)$, $\overrightarrow{AD} = (2, 2, 2)$. 则体积 $V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3$.

注记 计算的过程中要注意是四面体还是平行六面体; 利用这种办法可以判断四点是否共面, 即如果计算得上述行列式为0, 则四点共面.

例1.10 试求通过点 $M_1(2, -1, 3)$ 和 $M_2(3, 1, 2)$ 且平行于向量 $\boldsymbol{v} = (3, -1, 4)$ 的平面方程.

解 设平面的法向量为 \boldsymbol{n} , 则 $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{n}$ 且 $\boldsymbol{n} \perp \overrightarrow{M_1M_2}$, 其中 $\overrightarrow{M_1M_2} = (1, 2, -1)$.

计算 $\overrightarrow{M_1M_2} \times \boldsymbol{v} = (7, -7, -7)$. 因此不妨取 $\boldsymbol{n} = (1, -1, -1)$, 从而设平面方程为 $x - y - z + \lambda = 0$. 代入 $M_1(2, -1, 3)$ 得: $\lambda = 0$. 因此所求平面方程为 $x - y - z = 0$.

注记 解析几何题目很多都可以在做完之后可以代入所有条件检查.

例1.11 求通过点 $M(3, -1, 1)$ 且同时垂直于两个平面 $2x - z + 1 = 0$ 和 $y = 0$ 的平面方程.

解 设两个平面的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1 = (2, 0, -1)$ 和 $\boldsymbol{n}_2 = (0, 1, 0)$.

所求平面的法向量 \boldsymbol{n} 可取为 $\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = (1, 0, 2)$, 进而平面方程为 $x + 2z + \lambda = 0$.

代入 $M(3, -1, 1)$, 得 $\lambda = -5$. 因此所求平面方程 $x + 2z - 5 = 0$.

例1.12 计算点 $M(2, -1, -1)$ 到平面 $16x - 12y + 15z - 4 = 0$ 的距离 d .

解 $d = \frac{|16 \times 2 - 12 \times (-1) + 15 \times (-1) - 4|}{\sqrt{16^2 + 12^2 + 15^2}} = 1$.

例1.13 两平行平面 $3x + 6y - 2z - 7 = 0$ 和 $3x + 6y - 2z + 14 = 0$ 的距离 $d = \frac{|-7 - 14|}{\sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2}} = 3$.

例1.14 求过点 $M(0, 2, 4)$ 且与两平面 $x + 2z = 1$, $y - 3z = 2$ 平行的直线方程.

解 经过分析, 该直线必定同时落在两个分别与已知平面平行的平面上. 因此不妨设直线方程为: $l: \begin{cases} x + 2z = \lambda \\ y - 3z = \mu \end{cases}$. 代入 $M(0, 2, 4)$, 得: $\lambda = 8, \mu = -10$.

例1.15 求过点 $M(2, -3, 4)$ 且和 z 轴垂直并相交的直线方程.

解 考察过 M 且与 z 轴垂直的平面 $z = 4$ 与 z 轴交点为 $P(0, 0, 4)$. 故所求直线为 M, P 所在直线. 取方向向量为 $\overrightarrow{PM} = (2, -3, 0)$, 又直线过点 P , 知直线方程 $l: \frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z - 4}{0}$.

由于本章不是考试内容(从往年的经验来说), 本节和下一节的题目仅仅是部分作业题, 而这些题目涉及的知识点已经足够为后期做准备了. 当然, 对于空间解析几何感兴趣的同学可以再自己找一些题目.

§1.6 二次曲面

例1.16 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1$ 是由 Oxy 平面上的椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 绕 x 轴旋转得到, 当然也可以认

为由 Oxz 平面上的椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ 绕 x 轴旋转得到. 关于绕某个坐标轴旋转的一个技巧是固定该变量(例如本题的 x), 把剩下的变量(例如第一种说法的 y)置换为两个变量的形式(例如本题为 $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$). 由此可见 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 1$ 不是旋转曲面.

例1.17 一动点 $P(x, y, z)$ 到原点的距离等于它到平面 $z = 4$ 的距离, 试求此动点 P 的轨迹, 并判定它是什么曲面.

解 由题意, $x^2 + y^2 + z^2 = |z - 4|^2$, 即 $z = 2 - \frac{x^2 + y^2}{8}$, 这是一个椭圆抛物面.

注记 请大家回忆高中时学习的抛物线的定义, 与本题所给条件有何类似之处.

下面给出一个比较难的例子, 结束本章的讨论.

例1.18 求 Oyz 平面上的直线 $y - 2z + 1 = 0$ 绕 Oyz 平面上的直线 $y = z$ 旋转所得曲面的方程.

解 设 $l_0 = \{y = z\} \cap \{x = 0\}$, $l = \{y - 2z + 1 = 0\} \cap \{x = 0\}$, $P(x, y, z)$ 是旋转曲面上的点, $M(0, 1, 1) = l_0 \cap l$. 下面从两个不同的角度给出两种解法.

法一 易知, \overrightarrow{MP} 与 l_0 夹角等于 l 与 l_0 夹角. 设 $l_0 = (0, 1, 1)$, $l = (0, 2, 1)$ 分别为 l_0 和 l 的方向向量, 则 $\frac{|\overrightarrow{MP} \cdot l_0|}{|\overrightarrow{MP}|} = \frac{|l \cdot l_0|}{|l|} = \frac{3}{\sqrt{5}}$. 代入 $\overrightarrow{MP} = (x, y - 1, z - 1)$, 得:

$$|y + z - 2|^2 = \frac{9}{5}(x^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2)$$

化简, 得: $9x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 10yz + 2y + 2z - 2 = 0$. 这是一个圆锥面.

法二 考虑将曲线旋转为相当于是绕 z 轴旋转的. 考察在 Oyz 平面逆时针旋转 $\frac{\pi}{4}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (*)$$

则 $l'_0 = \{y' = 0\} \cap \{x' = 0\}$ 为 z 轴, $l' = \{3y' - z' + \sqrt{2} = 0\} \cap \{x = 0\}$. l' 绕着 z 轴旋转得到: $\pm 3\sqrt{x'^2 + y'^2} - z' + \sqrt{2} = 0$, 即 $9x'^2 + 9y'^2 - z'^2 + 2\sqrt{2}z' - 2 = 0$. 代入(*), 有:

$$9x^2 + 9\left(\frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}z\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z\right)^2 + 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z\right) - 2 = 0.$$

化简, 得: $9x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 10yz + 2y + 2z - 2 = 0$.

§2 Euclid空间与度量拓扑

印刷体： \mathbf{a} ；手写体： \vec{a} . 为什么有这种区分..... 因为你把 a 怎么描都描不成黑体的.

§2.1 有限维Euclid空间

定义集合 $\mathbb{R}^d = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d) : x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq d\}$, 它叫做 d 维Euclid空间. 通过定义其中点(向量)的加法和数乘, 可以确定一个线性空间, 因此也被称作一个 d 维向量空间.

定理2.1.1 定义内积: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^d x_i y_i \in \mathbb{R}$, 它满足:

- (1)(正定性) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$, 当且仅当 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 取等;
- (2)(对称性) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$;
- (3)(线性性) $(\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \lambda \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mu \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).

即这个内积诱导出了一个实内积空间 (\mathbb{R}^d, \cdot) . □

进一步地, 内积空间通过定义 $|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$ 给出了 \mathbf{x} 的模. 这个模诱导的度量 $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ 就是我们熟知的Euclid度量(距离).

定理2.1.2 \mathbb{R}^d 作为内积空间诱导出的这个模 $|\mathbf{x}|$ 是个范数, 即满足:

- (1)(正定性) $|\mathbf{x}| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$;
- (2)(齐次性) $|\lambda \mathbf{x}| = |\lambda| |\mathbf{x}|$ ($\lambda \in \mathbb{R}$);
- (3)(三角不等式) $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$.

因此 $(\mathbb{R}^d, |\cdot|)$ 是赋范线性空间. □

定理2.1.3 向量的夹角 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \arccos \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{x}| |\mathbf{y}|}$ ($|\mathbf{x}| |\mathbf{y}| \neq 0$)是良定的.

证明 由Cauchy-Schwarz不等式立得 $\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{x}| |\mathbf{y}|} \in [-1, 1]$. □

规定 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ 表示 \mathbf{x} 与 \mathbf{y} 正交. 如果 $\exists c \in \mathbb{R}$, 使得 $\mathbf{x} = c\mathbf{y}$ 或 $\mathbf{y} = c\mathbf{x}$, 称 \mathbf{x} 与 \mathbf{y} 共线. 显然, 零向量 $\mathbf{0}$ 与任何向量正交, 也与任何向量共线. 非0向量的共线, 夹角一定是0或 π . 我们称夹角为0的两个向量为同向的, 夹角为 π 的两个向量为反向的.

取 \mathbf{e}_i 为第 i 个分量为1, 其余分量为0的向量, 则 $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^d$ 之间两两正交, 这种向量组被称为**正交向量组**. 除此以外, 它还满足每个向量都是单位向量, 我们称这个向量组是**规范的**. 更进一步, 对于任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, 均可以用上述向量组线性表示, 这个向量组被称为 \mathbb{R}^d 的一组**基**. 综合这三条, 我们称 $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^d$ 为 \mathbb{R}^d 的一组**正交规范基**. 藉此, 我们定义

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

其中的 δ 是关于 i 和 j 的二元函数, 我们称 δ_{ij} 为**Kronecker符号**.

当然, 除了Euclid度量以外, 我们还可以定义其他度量. 定义 \mathbf{x} 的 **p -范数**:

$$\|\mathbf{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^d |x_i|^p} \quad (1 \leq p < \infty), \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq d} |x_i|$$

特别地, 2-范数 $\|\cdot\|_2 = |\cdot|$ 为Euclid范数. 下面介绍若干与之有关的不等式.

定理2.1.4 (Hölder不等式) 设 $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则对 $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$, 有: $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q$.

注记 (1) 上述结论等价于一个看似更强的结论: $\sum_{i=1}^d |x_i y_i| \leq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^d |x_i|^p} \sqrt[q]{\sum_{i=1}^d |y_i|^q}$;

(2) 如果 $p = 1$, 则该结论对于 $q = \infty$ 的成立是显然的;

(3) 当 $p = 2$ 时, Hölder不等式退化为Cauchy-Schwarz不等式;

(4) 仅当 $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| = 0$ 或 $\exists c_1, c_2 > 0$, 使得 $c_1 |x_i|^p = c_2 |y_i|^q (1 \leq i \leq d)$ 时取等.

证明 方法较多, 可以参考[3]上册306页例8. □

定理2.1.5 (Minkowski不等式) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p \leq \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p \quad (1 \leq p \leq \infty)$.

注记 (1) 它其实是Banach空间 l^p 中的三角不等式;

(2) 不等式取等当且仅当 $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| = 0$ 或 \mathbf{x} 与 \mathbf{y} 同向.

证明 需要对 p 进行分情况讨论, 第一种情况下设 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:

$$1. \quad 1 < p < \infty \text{ 时, } \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p^p = \sum_{i=1}^d |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^d |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^d |y_i| |x_i + y_i|^{p-1}$$

$$\leq \left(\left(\sum_{i=1}^d |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^d |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \left(\sum_{i=1}^d |x_i + y_i|^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} = (\|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p) \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p^{\frac{p}{q}}$$

$$\therefore \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p^{\frac{p-q}{q}} \leq (\|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p)$$

这其中第一个不等号在 $x_i y_i \geq 0$ 时取等；第二个不等号在 $|x_i|^p, |y_i|^p, |x_i + y_i|^{q(p-1)}$ 对应成比例或 $\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| = 0$ 的情况下取等，结合第一个不等号取等条件，这等价于 $\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| = 0$ 或 \mathbf{x} 与 \mathbf{y} 同向。

$$2. p = 1 \text{ 时, } \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_1 = \sum_{i=1}^d |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^d (|x_i| + |y_i|) = \|\mathbf{x}\|_1 + \|\mathbf{y}\|_1.$$

这个不等式当且仅当 $\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| = 0$ 或 \mathbf{x} 与 \mathbf{y} 同向时取等是显然的。

$$3. p = \infty \text{ 时, } \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq d} |x_i + y_i| \leq \sup_{1 \leq i \leq d} |x_i| + \sup_{1 \leq i \leq d} |y_i| = \|\mathbf{x}\|_\infty + \|\mathbf{y}\|_\infty.$$

这个不等式当且仅当 $\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| = 0$ 或 \mathbf{x} 与 \mathbf{y} 同向时取等也是显然的。□

§2.2 度量拓扑的基本性质

之所以称开集、闭集、连通等概念为拓扑性质，是因为这些都是由开集导出，而有限维Euclid空间中的开集全体组成的集合族正是其上的度量拓扑。我们规定记号：开球 $B_r(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < r\}$ ，去心开球 $\hat{B}_r(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} : 0 < |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < r\}$ 。下面介绍一些度量拓扑的最基本结论。

定理2.2.1 \mathbb{R}^d 和 \emptyset 是既是开集，也是闭集。

引理2.2.2 (De Morgan对偶原理) 设 $\Lambda \subset 2^{\mathbb{R}^d}$ ，则

$$\left(\bigcap_{E \in \Lambda} E \right)^C = \bigcup_{E \in \Lambda} E^C, \quad \left(\bigcup_{E \in \Lambda} E \right)^C = \bigcap_{E \in \Lambda} E^C.$$

定理2.2.3 若干个开集的并是开集，有限个开集的交是开集。

定理2.2.4 若干个闭集的交是闭集，有限个闭集的并是闭集。

定理2.2.5 有限点集一定是闭集。

定义2.2.6 集合 E 的所有聚点组成的集合 E' 称为 E 的**导集**， $\bar{E} = E \cup E'$ 被称为 E 的**闭包**。

定理2.2.7 E 是开集 $\Leftrightarrow E^\circ = E$ ； F 是闭集 $\Leftrightarrow \bar{F} = F$ 。

定理2.2.8 F 是闭集 $\Leftrightarrow E$ 中的任何收敛点列的极限必定落在 F 中。

定理2.2.9 E° 一定是开集； ∂E 、 E' 和 \bar{E} 一定是闭集。

定理2.2.10 E° 是含于 E 的最大开集； \bar{E} 是包含 E 的最小闭集。

定理2.2.11 $\partial E \cup E = \bar{E}$ ，即 $\partial E = \bar{E} \cap (E^\circ)^C$ 。

证明 它们的证明建议作为练习，部分证明可以参考[3]。□

例2.1 \mathbb{Q} 在 \mathbb{R} 中稠密，因此 $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ ； \mathbb{Q}^C 在 \mathbb{R} 中稠密，因此 $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$ 。

例2.2 设 $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 是投影算子，即 $P(x, y) = x$ 。设 E 是 \mathbb{R}^2 的开集，求证： $P(E)$ 是 \mathbb{R} 的开集。并请举反例： F 是 \mathbb{R}^2 的闭集，但 $P(F)$ 不是 \mathbb{R} 的闭集。

提示 开集的证明利用定义即可. 闭集的反例考察一条渐进的曲线图像.

定理2.2.12 设 $f: \mathbb{R}^{d_1} \rightarrow \mathbb{R}^{d_2}$ 为连续映射, 则 f 在 \mathbb{R}^{d_2} 中开集的原像是开集. \square

注记 这在一般的拓扑空间中经常被用做连续的定义.

练习 一般情况下, ∂E 与 E' 之间是否有包含关系? 试举例说明.

§2.3 连通与道路连通

在教材中, 给出的关于任意两点均存在连续曲线连接之的定义是**道路连通**, 下面给出更一般的连通的定义:

定义2.3.1 称 $E \subset \mathbb{R}^d$ 为**连通集**, 是指对任意关于 E 的分解 $E = A \cup B$, A, B 不交且非空, 便可使得 $A \cap B' \neq \emptyset$ 或 $A' \cap B \neq \emptyset$ 成立.

定理2.3.2 开集 E 是连通集当且仅当 E 不能分解为两个非空不交的开集之并.

证明 参考[3]上册332页定理8.5.1. \square

上述定义及定理虽然表述抽象, 但是从数学的角度给出了关于连通的一个合理描述. 通过从这个定义出发, 我们还能得到更多的结论.

定理2.3.3 在 \mathbb{R} 上, 一个集合连通当且仅当它是区间.

证明 参考[3]上册333页定理8.5.2. \square

这里的一个核心问题是探讨连通和道路连通的关系, 事实上, 道路连通是更强的条件.

定理2.3.4 道路连通集一定是连通集.

证明 参考[3]上册334页定理8.5.3. \square

定理2.3.5 如果 E 是连通集, 则 \bar{E} 也是连通集.

证明 假设 $\exists A, B$ 为非空不交集合, 满足 $\bar{E} = A \cup B$, $A' \cap B = \emptyset$ 且 $A \cap B' = \emptyset$.

令 $A_0 = A \cap E$, $B_0 = B \cap E$, 则 $E = A_0 \cup B_0$, 且 A_0 与 B_0 不交, 且 $A' \cap B = \emptyset$, 得到: $A' \cap B_0 = \emptyset$, 又 $A'_0 \subset A'$, 故 $A'_0 \cap B_0 = \emptyset$, 同理 $A_0 \cap B'_0 = \emptyset$.

由于 E 是连通集, 这迫使 $A_0 = \emptyset$ 或 $B_0 = \emptyset$. 不妨设 $A_0 = \emptyset$, 则 $A \subset \bar{E} \setminus E \subset E'$.

另一方面, $E \subset B$, 故 $E' \subset B'$, 所以 $A \subset B'$ 与 $A \cap B' = \emptyset$ 且 $A \neq \emptyset$ 矛盾! \square

对于定理2.3.4的逆命题, 我们存在反例: 连通集不是道路连通集.

例2.1 设 $E = \{(x, y) : y = \sin \frac{1}{x}, 0 < x \leq 1\}$. 则 \bar{E} 是连通集, 但不是道路连通的.

证明 依据定义, 请大家作为练习. \square

定义2.3.6 我们称连通开集为**区域**; 我们称连通闭集为**闭区域**.

引理2.3.7 在 \mathbb{R}^d 中, 开球一定是道路连通的, 从而是区域.

证明 参考[3]上册334页例1. □

引理2.3.8 \mathbb{R}^d 中既是开集又是闭集的集合只有 \emptyset 和 \mathbb{R}^d .

证明 设非空集合 A 既是开集又是闭集, 且 $A \neq \mathbb{R}^d$, 则 A^C 也是开集且非空, $\mathbb{R}^d = A \cup A^C$, 这说明 \mathbb{R}^d 不连通. 而 \mathbb{R}^d 是道路连通集是显然的, 因此得到矛盾! □

下面我们能够证明: 对于开集而言, 连通和道路连通是等价的.

定理2.3.9 区域一定是道路连通集.

证明 设 E 是区域. 对 $\forall \mathbf{x} \in E$, 取 $A(\mathbf{x})$ 为所有 E 中与 \mathbf{x} 道路连通的点组成的集合.

只需证 $E \setminus A(\mathbf{x}) = \emptyset$: 由于 $\mathbf{x} \in A(\mathbf{x})$, 故 $E \setminus A(\mathbf{x}) \neq \mathbb{R}^d$.

由引理2.3.7知 $A(\mathbf{x})$ 为开集, 从而 $E \setminus A(\mathbf{x})$ 是闭集. 下面假设 $E \setminus A(\mathbf{x})$ 不是开集:

$\exists \mathbf{x}_0 \in E \setminus A(\mathbf{x}), r > 0$, s.t. $B_r(\mathbf{x}_0) \subset E$ 且 $B_r(\mathbf{x}_0) \not\subset E \setminus A(\mathbf{x})$, 即 $B_r(\mathbf{x}_0) \cap A(\mathbf{x}) \neq \emptyset$.

取 $\mathbf{x}' \in B_r(\mathbf{x}_0) \cap A(\mathbf{x})$, 则存在 \mathbf{x} 到 \mathbf{x}' 和 \mathbf{x}' 到 \mathbf{x}_0 的连续曲线, 从而 $\mathbf{x}_0 \in A(\mathbf{x})$, 矛盾!

因此 $E \setminus A(\mathbf{x})$ 既是开集又是闭集, 故由引理2.3.8, $E \setminus A(\mathbf{x}) = \emptyset$. □

练习 试证明高维的介值定理: 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是连通集, $f \in C(\Omega)$, 则 $f(\Omega)$ 为区间.

§2.4 点列收敛与实数公理

通过上一节对有限维Euclid空间是内积空间的探讨, 我们得到了Euclid度量: $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$. 由这个定义结合定理2.1.2, 立刻得到Euclid度量满足正定性、对称性和三角不等式. 有了度量, 自然就可以定义邻域、有界、极限等概念. 自然地, 我们可以把大多数单变量的极限理论移植过来, 除非是涉及在高维Euclid空间中一些与一维无法对应的概念, 例如一维中的函数单调性. 下面我们就探索在单变量当中存在的几条实数公理是否依旧适用.

引理2.4.1 有限维Euclid空间中的点列收敛等价于依分量收敛.

证明 记 \mathbf{x}_n 的第 i 个分量为 $x_i^{(n)}$. 我们有显然的不等式: $\|\mathbf{x}_n\|_\infty \leq |\mathbf{x}_n| \leq \|\mathbf{x}_n\|_1$.

(必要性) 已知 $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ ($n \rightarrow \infty$), 由不等式左侧知 $\|\mathbf{x}_n\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq d} |x_i^{(n)}| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

(充分性) 已知 $x_i^{(n)} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty, \forall i$), 则 $\|\mathbf{x}_n\|_1 \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), 由不等式右侧, $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{0}$.

对于极限是 \mathbf{a} 的情况, 考察 $\{\mathbf{x}_n - \mathbf{a}\}$ 并应用上述结论即可. □

利用上述引理可以得到下述三条实数公理的等价定理, 它们的证明请参考[3]上册320-321页的定理8.2.3、8.2.4以及327页定理8.3.7.

定理2.4.2 \mathbb{R}^d 中的Cauchy列一定是收敛列. □

注记 这条定理说明 (\mathbb{R}^d, \cdot) 是Hilbert空间, $(\mathbb{R}^d, |\cdot|)$ 是Banach空间.

定理2.4.3 (Bolzano-Weierstrass) 任意有界点列必有收敛子列. □

定理2.4.4 (闭集套定理) 设 $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为闭集列, 且 F_n 随 n 单调递减. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(F_n) = 0$, 其中

$$\text{diam}(A) := \sup_{x, y \in A} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad (A \subset \mathbb{R}^d),$$

则 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ 是独点集. □

下面引入列紧性和紧性等概念.

定义2.4.5 若集合 E 中任意点列都有收敛子列, 称 E 是**列紧集**; 如果进一步要求任意点列都有收敛到 E 中一点的子列, 称 E 是**自列紧集**.

定义2.4.6 如果对于任意的 \mathcal{H} 是 E 的一个开覆盖, 都可以从 \mathcal{H} 中选出有限子覆盖, 称 E 是一个**紧集**. 更多地, 我们称 E 是紧的.

注记 紧性实际是一种化无穷为有限的有力工具.

在单变量中, 我们给出过有限覆盖定理(参考[7]附录A). 现在加以推广:

定理2.4.7 有限维Euclid空间中, 有界闭集、自列紧集、紧集相互等价.

证明 证明冗长, 感兴趣的同学参考[3]上册329页定理8.4.1和定理8.4.2. □

为了更好地理解列紧性, 给出一个例子作为练习:

例2.2 定义: 若 E 的每一个无限子集在 E 中有聚点, 则称 E 是Fréchet紧的.

求证: Fréchet紧等价于列紧. □

定理2.4.8 紧集上的连续函数是有界且一致连续的. □

§3 多变量函数的连续性与微分学

常值函数和指数函数 e^x 走在街上，远远看到了微分算子。常值函数吓得慌忙躲藏，说：“被它微分一下，我就什么都没有了。”指数函数不慌不忙道：“它可不能把我怎么样，我可是 e^x ！”指数函数与微分算子相遇。指数函数自我介绍道：“你好，我是 e^x 。”微分算子道：“你好，我是 $\frac{\partial}{\partial y}$ ！”

§3.1 极坐标与极限计算

我们先以二维的情况为例，考察原点处的极限过程，极坐标变换：
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0^+} f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

其中右式的结果如果(对 θ)是一致收敛于常数的，则所求极限存在且为右侧收敛的常数。

对于一般情况($x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$)，只需做平移即可化为上述情况。如果 $x \rightarrow \infty$ ，则通过反演变换 x 替换为 $\frac{1}{x}$ 即可化为 $x \rightarrow 0$ 的情况。值得注意的是，如果是单侧极限(例如 $x \rightarrow 0^+$)，我们需要特别考察 θ 的取值范围，忽略这点经常会对结果造成影响。

在实际计算极限中，我们通常先利用我们已有的手段(比如Taylor展开、L'Hospital法则)把极限化为比较简单的形式之后，再利用上述办法，下面举几个例子。

例3.1
$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{x+y+1}-1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2xy}{x+y} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r \sin 2\theta}{\cos \theta + \sin \theta}.$$

这并不是(对 θ)一致收敛的，因此极限不存在。

例3.2
$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{|x|+|y|} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r \sin 2\theta}{|\cos \theta| + |\sin \theta|}.$$

其中 $\frac{r|\sin 2\theta|}{|\cos \theta| + |\sin \theta|} \leq r$ ，因此上式一致收敛于0，故所求极限即为0。

例3.3 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^6 y^8}{(x^2 + y^4)^5} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\cos^6 \theta \sin^8 \theta}{(\cos^2 \theta + r^2 \sin^4 \theta)^5} r^4$. 其中 $r > 0$ 时, 有

$$\frac{|\cos^6 \theta \sin^8 \theta|}{|\cos^2 \theta + r^2 \sin^4 \theta|^5} r^4 \leq \begin{cases} \frac{|\cos^5 \theta| \sin^6 \theta}{2} r^3 \leq \frac{1}{2} r^3, & \sin \theta \cos \theta \neq 0 \\ 0 \leq \frac{1}{2} r^3, & \sin \theta \cos \theta = 0 \end{cases}$$

故 $\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\cos^6 \theta \sin^8 \theta}{(\cos^2 \theta + r^2 \sin^4 \theta)^5} r^4$ 一致趋于 0, 所求极限即为 0.

注记 传统的直接放缩的办法也适用于这些题目, 但是极坐标的优势是能够清晰地分割出无穷小部分(r)和方向部分(θ), 更有利于我们选择恰当的放缩方式. 而分不同方向趋近得到不同极限的办法来证明极限不存在对于复杂的题目可能比较难以观察取哪个分支较好. 因此, 这种方法无疑在处理这类比较复杂的有理函数极限的问题中有着较大的优势, 但是同时对同学们不等式放缩于估计的能力要求较高. 当然, 一些形式较为简单的题目可以直接放缩并利用夹逼原理求解, 这就需要同学们会灵活处理多变量极限问题.

下面介绍 n 维的极坐标公式. 事实上, n 元函数的极限很少出现, 并且即使出现, 由于其复杂程度也很难通过极坐标的方法进行估计. 但是高维的极坐标公式在将来涉及到 n 重积分的极坐标换元问题中有所应用.

置 $\theta_n = \frac{\pi}{2}$. 则极坐标换元公式可统一表为:

$$x_i = r \prod_{k=1}^{n-i} \cos \theta_k \cdot \sin \theta_{n-i+1} \quad (1 \leq i \leq n).$$

§3.2 多变量函数的可微性

例3.4 已知 $f(x, y) \in C(\mathbb{R}^2)$, $f(0, 0) = 0$, 且存在 U 为 $(0, 0)$ 的一个开邻域, s.t. $f \in C^1(U)$.

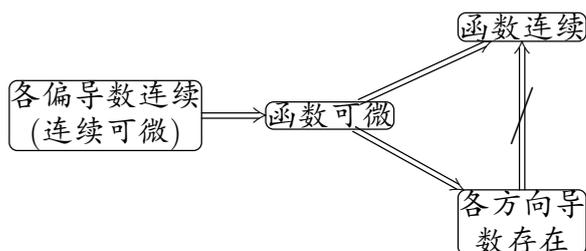
证明: $\exists g(x, y), h(x, y) \in C(U)$, s.t. $f(x, y) = xg(x, y) + yh(x, y)$.

证明 置 $g(x, y) = \frac{f(x, y) - f(0, y)}{x}$, $h(x, y) = \frac{f(0, y)}{y}$. □

例3.5 求 $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^\alpha \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 在 $(0, 0)$ 可微的充要条件.

答案 $\alpha > \frac{1}{2}$.

下面给出几种条件之间的强弱关系:

定理3.2.1

证明 三个箭头的证明请参考[3]上册358页定理9.2.3和360页定理9.2.4.

考察例3.5中 $\alpha = 1$ 的情况, f 是可微的, 但是两个偏导数在 $(0,0)$ 处都不连续, 这给出了最左侧箭头反过来的反例; 考察 $f(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) = (0, 0) \text{ 或 } x \neq y^2 \\ 1, & (x, y) \neq (0, 0) \text{ 且 } x = y^2 \end{cases}$, 它在 $(0,0)$ 处任意方向导数存在, 但是在 $(0,0)$ 处并不连续. \square

§3.3 换元与隐函数求导

在多变量微分学中, 换元和隐函数求导是比较难的一块. 换元的麻烦在于要弄清各个变量之间的依赖关系, 隐函数求导可以选择公式法, 也可以灵活地具体问题具体分析.

例3.6 计算 $J_{(x,y)}(u, v)$, 其中 $\begin{cases} x = e^u + u \sin v \\ y = e^u - u \cos v \end{cases}$.

解 $J_{(x,y)}(u, v) = J_{(u,v)}^{-1}(x, y) = \frac{1}{u(e^u \sin v - e^u \cos v + 1)} \begin{pmatrix} u \sin v & -u \cos v \\ -e^u + \cos v & e^u + \sin v \end{pmatrix}$.

例3.7 函数 $u = u(x, y)$ 由方程组 $u = f(x, y, z, t)$, $g(y, z, t) = 0$, $h(z, t) = 0$ 定义, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial y}$.

注记 我们以后总是用 $y \longrightarrow x$ 表示 y 是 x 的函数.

解

经过分析, 几个变量之间的关系为:

```

    graph TD
      u --> x
      u --> z
      z --> t
      t --> y
  
```

在 $g(y, z, t) = 0$ 和 $h(z, t) = 0$ 两边分别对 y 求偏导, 有: $\begin{cases} g'_1 + g'_2 \frac{\partial z}{\partial y} + g'_3 \frac{\partial t}{\partial y} = 0 \\ h'_1 \frac{\partial z}{\partial y} + h'_2 \frac{\partial t}{\partial y} = 0 \end{cases}$, 故

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial t}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g'_2 & g'_3 \\ h'_1 & h'_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -g'_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{g'_2 h'_2 - g'_3 h'_1} \begin{pmatrix} -g'_1 h'_2 \\ g'_1 h'_1 \end{pmatrix}.$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x} = f'_1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u'_2 + u'_3 \frac{\partial z}{\partial y} + u'_4 \frac{\partial t}{\partial y} = f'_2 + \frac{g'_1}{g'_2 h'_2 - g'_3 h'_1} (f'_4 h'_1 - f'_3 h'_2).$$

练习 设 $u = f(z)$, $z = x + y\varphi(z)$ 为 x, y 的隐函数. 证明 Lagrange 公式: $\frac{\partial^n u}{\partial y^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \left\{ [\varphi(z)]^n \frac{\partial u}{\partial x} \right\}$.

例 3.8 设 $u = xyz e^{x+y+z}$, 求 $\frac{\partial^{p+q+r} u}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}$.

解 $u = x e^x y e^y z e^z$ 是可分离的, 直接计算得: $\frac{\partial^{p+q+r} u}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r} = (x+p)(y+q)(z+r) e^{x+y+z}$.

下面介绍一种很常用的微分算子——Laplace 算子“ Δ_n ”, 其中 n 是它的维数, 在不引起混淆的时候我们一般忽略不写. 它的定义是: $\Delta = \nabla^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

参考文献

- [1] 中科大数学分析(B2)课程教材编写组. 数学分析讲义. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2018.1
- [2] 金玉明, 顾新身, 毛瑞庭. 积分的方法与技巧. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2017.1
- [3] 常庚哲, 史济怀. 数学分析教程(第3版). 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2012.8
- [4] 李炯生, 查建国, 王新茂. 线性代数(第2版). 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2010.1
- [5] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法(第2版). 北京: 高等教育出版社, 2006.4
- [6] 丘维声. 解析几何(第2版). 北京: 北京大学出版社, 1996.10
- [7] (看到这条, 认真你就输啦)吴天. 数学分析(B1)习题课讲义. 齐齐哈尔: 未出版, 2018.1